



TITLE:

On Some Conditions for Weak and Strong Consistency of Simple Least Squares Estimators for Regression Parameters and Strong Consistency of an Estimator for Spectral Density Function (時系列における統計的推定論の研究)

AUTHOR(S):

豊岡, 康行

CITATION:

豊岡, 康行. On Some Conditions for Weak and Strong Consistency of Simple Least Squares Estimators for Regression Parameters and Strong Consistency of an Estimator for Spectral Density Function (時系列における統計的推定論の研究). 数理解析研究所講究録 1977, 312: 125-136

ISSUE DATE:

1977-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103910>

RIGHT:

On some conditions for weak and strong consistency of Simple Least Squares Estimators for regression parameters and strong consistency of an estimator for spectral density function.

慶應義塾大学 工学部 豊岡康行

§1. Introduction

時系列の線形 mean function の推定を含めた model は, statistical linear model $y_t = \beta'x_t + u_t$ ($t=1, 2, \dots$) とし て扱われよう。この model 2", $\{u_t\}$ が i.i.d. Normally の場合には, $\beta(p \times 1)$ の Simple Least Squares Estimator $\hat{\beta}_T$ (以下 SLS E と略) が strongly consistent になる 為の必要十分条件は, $A_T = \sum_{t=1}^T x_t x_t'$ が nonsingular の下で, $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ 2" あることと, Anderson, T.W ([1]) は, ある martingale limit theorem を使っ て示した。

こゝで は, $p=1$ のときは, Normality と identicality の仮定なしに $\hat{\beta}_T$ の strong consistency の必要十分条件が, $(\sum_{t=1}^T x_t^2)^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ で与えられることを示す。 $p>1$ の場合は, 難かしい様がある。

しか し, weak consistency に関し ては, $\{u_t\}$ が orthogonal 2" ありさ える下で, $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ in \mathbb{P} as $T \rightarrow \infty$ ($p \geq 1$) の必要十分条件は, $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ 2" 与えられる。

$\{u_t\}$ が weakly stationary process に従うときには, $p=1$ の Hannan, E.J. (1955) の $\beta_T \rightarrow 3$ a.e. ω $T \rightarrow \infty$ の十分条件の結果が, ある条件の下で, $p>1$ のときにも成立することがわかる。証明方法は Hannan の方法と同様である。

$\{u_t\}$ に次数既知の AK-model を仮定すれば, 残差を使って形式的につくった, 係数の Simple Least Squares Estimator が strongly consistent になるための条件を考察する。更に, 推定量の関数として表わされる spectral density の推定量が strongly consistent であることを示す。

§2. Notations and some lemmata

model は,

$$y_t = \beta' x_t + u_t \quad t=1, 2, \dots \quad (2.1)$$

ここに $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]'$, $\beta_T: \beta$ の SLS E, $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{pt}]'$, $\{u_t; t=1, 2, \dots\}$ を (Ω, \mathcal{F}, P) 上の $E u_t = 0$, $E u_t^2 = \sigma_t^2 < \infty$ for all $t=1, 2, \dots$ の確率変数列とする。

Lemma 1.

$\{u_t\}$ を independent な $E u_t = 0$, $E u_t^2 = \sigma_t^2 < \infty$ の確率変数列とする。 $\sigma_t \geq 0$ を発散列とする。このとき, もし $\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_t^2 / \sigma_t^2 < \infty$ であれば, $\frac{\sum_{t=1}^T u_t}{\sigma_T} \rightarrow 0$ a.e. ω $T \rightarrow \infty$ である。

proof: (See, Breiman, (1955))

Lemma 2.

$\{u_t\}$ を Lemma 1 と同じ仮定の確率変数列とする。このとき、 $\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_t^2 < \infty$ であれば、 $\sum_{t=1}^{\infty} u_t$ は a.e. で収束する。

proof: (See, Lukacs, E. ([10]))

Lemma 3.

$\{u_t\}$ を無相関で $E u_t = 0, E u_t^2 = \sigma_t^2 < \infty$ for all $t = 1, 2, \dots$ の確率変数列とする。このとき、 $\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_t^2 < \infty$ であれば、 $\sum_{t=1}^{\infty} u_t$ は確率収束する。

proof: (省略)

Lemma 4.

$\{A_T^{-1}\}$ を positive definite matrix ($p \times p$) の列とする。このとき $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ と $\delta' A_T \delta \rightarrow \infty$ as $T \rightarrow \infty$ for any fixed $\delta (\neq 0) \in R^p$ と同等である。

proof: (省略)

今 $\{u_t\}$ を無相関、等分散の確率変数列とする。このとき

Anderson, T.W. ([1]) に従って、次の rotations を使う。

$$\beta \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix}, X_t \equiv \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix}, \hat{\beta}_T \equiv \begin{bmatrix} \hat{\beta}_T \\ \hat{\beta}_T^{(2)} \end{bmatrix}, A_T \equiv \begin{bmatrix} a_{11T} & a_{12T} \\ a_{21T} & a_{22T} \end{bmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$\hat{\beta}_T - \beta_1 = Y_T / S_T \quad (\text{但し } Y_T \equiv \sum_{t=1}^T (x_{1t} - a_{12T} A_{22T}^{-1} x_t^{(2)}) u_t, S_T \equiv \sum_{t=1}^T (x_{1t} - a_{12T} A_{22T}^{-1} x_t^{(2)})^2)$$

となる。 $\gamma_1^2 \equiv S_p$, $v_T \equiv Y_p / \gamma_1$ とおく。 $T \geq p$ のときは、

$$Y_{T+1} - Y_T = (a_{12T} A_{22T}^{-1} - a_{12T+1} A_{22T+1}^{-1}) \sum_{t=1}^T x_t^{(2)} u_t + (x_{1T+1} - a_{12T+1} A_{22T+1}^{-1} x_{T+1}^{(2)}) u_{T+1} \text{ と}$$

なるので、 $Y_{T+1} - Y_T$ は、 $Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_T$ と無相関となる。

$y_t = S_{t+p-1} - S_{t+p-2}$, $v_t = \frac{Y_{t+p-1} - Y_{t+p-2}}{\delta_t}$, $t=2, 3, \dots$ とおけば,
 $\{v_t\}$ は, $E v_t = 0$, $E v_t^2 = \sigma^2$ という無相関, 等分散の確率変数になる。更に $\sum_{t=1}^{T-p+1} y_t^2 = S_T = \sum_{t=1}^T (x_t - a_{1T} A_{1T}^{-1} x_t^{(2)})^2 = a_{11T} - a_{12T} A_{2T}^{-1} a_{21T}$
 は A_T^{-1} の (1,1) element の逆数である。

Lemma 5.

$\hat{\beta}_T - \beta = \frac{\sum_{t=1}^{T-p+1} y_t v_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} y_t^2}$ となる。(但し $y_t, \{v_t\}$ は上で定義したもの)

§3. Conditions for strong consistency of SLSE (independent but not identical case)

$p=1$ のときは, Anderson, T.W. [11] の結果は, Normality と identicality の条件をはずすことができる。

Theorem 1.

$p=1$ で, $0 < \sigma_t^2 < M_1 < \infty$ の下で, $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ の必要十分条件は, $(\sum_{t=1}^T x_t)^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ である。

proof (略証): (Sufficiency) $\hat{\beta}_T - \beta = \frac{\sum_{t=1}^T x_t u_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \rightarrow 0$ a.e. の1つの十分条件は Lemma 1. で, $b_T = \sum_{t=1}^T x_t^2$ において, 定理の前提を使えば,
 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t^2}{(\sum_{t=1}^t x_t^2)^2} < \infty$ となる。 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t^2}{(\sum_{t=1}^t x_t^2)^2} \leq 1 + \sum_{t=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^t x_t^2} - \frac{1}{\sum_{t=1}^{t-1} x_t^2} \right)$ と $\sum_{t=1}^T x_t^2 \rightarrow \infty$ を使えば, 明らか。

(Necessity) 対偶 (i.e. $\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2 < \infty \Rightarrow \frac{\sum_{t=1}^T x_t u_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \rightarrow 0$ a.e. ではない) を示す。Lemma 2 より $\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2 < \infty$ なら, $\sum_{t=1}^{\infty} x_t u_t$ は a.e. で収束する。
 $\therefore \frac{\sum_{t=1}^T x_t u_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{\infty} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2}$ a.e. とする。 $E \left(\frac{\sum_{t=1}^T x_t u_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \right)^2 = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^2 \sigma_t^2}{(\sum_{t=1}^T x_t^2)^2} > 0$ と

いう定数に a.e. 収束するということに反する。□

§4. Conditions for weak consistency of SLSE. (orthogonal case)

$p > 1$ のとき K は, strong consistency についての必要十分条件は与えられなかつたが, weak consistency については必要十分条件が得られる。 $\{u_t\}$ は, orthogonal, equal variance の確率変数の列とする。

Theorem 2.

$A_T = \sum_{t=1}^T x_t x_t'$ は nonsingular とする。このとき $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ in P as $T \rightarrow \infty$ の必要十分条件は, $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ で与えられる。

proof: (sufficiency) $\hat{\beta}_T - \beta \rightarrow 0$ in P の 1 つの十分条件は,

$\text{Cov}(\hat{\beta}_T - \beta) = \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right)^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ である。

(necessity) $\hat{\beta}_T - \beta = \left(\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T x_t u_t$ の第 1 要素は, Lemma 5 によつて

$\hat{\beta}_{1T} - \beta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t^2}$ (但し, $\{u_t\}$ は $E u_t = 0$, $E u_t^2 = \sigma^2$ の orthogonal 確率変数)

と表現できる。必要性の対偶命題は, $A_T^{-1} \not\rightarrow 0$ なら, $\exists j$ s.t.

$(\hat{\beta}_T - \beta)_j \not\rightarrow 0$ in P as $T \rightarrow \infty$ である。よつて $\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2 < \infty$ ($\Leftrightarrow A_T^{-1}$ の

(1,1) 要素が 0 に収束しない。) なら, $\frac{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t^2} \not\rightarrow 0$ in P を示す。

Lemma 3. より $\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2 < \infty$ なら $\sum_{t=1}^{\infty} x_t u_t$ が確率収束している。故に

$\frac{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} x_t^2} \rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{\infty} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2}$ in P as $T \rightarrow \infty$ 。しかし $E \left(\frac{\sum_{t=1}^{\infty} x_t u_t}{\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{\infty} x_t^2} > 0$ 。これは 0 に確率収束することと反する。

以上より, $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ in P as $T \rightarrow \infty$ と $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ と同等。□

Remark: この結果は, Eicker, F ([5]) の Theorem 1 の拡張となる。

ていふと考えられる。(Eicker, Γ は $\{u_t\}$ の Normality を仮定している。)

Remark: §3 の Theorem 1 で $p > 1$ のときは, 必要性は Theorem 2 と同様に示せるが, 十分性が問題となる。もし $\hat{\beta}_T - \beta$ が Normally distributed であれば良い。(Anderson, T.W. ([1]))

次に $\{u_t\}$ を orthogonal な確率変数の列とし, 分散に有界性を仮定すると, 次の事がわかる。

Theorem 3

$0 < M_1 < \sigma_t^2 < M_2 < \infty$ for all $t=1, 2, \dots$ とする。 A_p は nonsingular とする。このとき, $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ in P as $T \rightarrow \infty$ の必要十分条件は, $A_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ である。

proof: (略証) (2.1) で, $y_t/\sigma_t = \beta'x_t/\sigma_t + u_t/\sigma_t$ $t=1, 2, \dots$ とすれば, これは Theorem 2 の場合に帰着されることになる。ところで, $B_T = \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t^2} x_t x_t'$ とすると, Lemma 4 より $B_T^{-1} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ と $\sum_{t=1}^T \frac{x_t x_t' \gamma}{\sigma_t^2} \rightarrow \infty$ as $T \rightarrow \infty$ for any fixed $\gamma (\neq 0) \in R^p$ と同等。また $x_t x_t'$ が positive semidefinite matrix であるので $\frac{1}{M_1} \gamma' A_T \gamma \geq \gamma' B_T \gamma \geq \frac{1}{M_2} \gamma' A_T \gamma$ が成立。 $\therefore A_T^{-1} \rightarrow 0$ と $B_T^{-1} \rightarrow 0$ は同等。 \square

§5. Sufficient conditions for strong consistency of SLSE (weakly stationary process case)

Hannan, E.J. ([8]) の結果は, 容易に multi-parameter case へ

拡張される。

$\{u_t\}$ を real valued weakly stationary process with mean zero とし, $f(\lambda)$ をその spectral density function とする。又 $\{\alpha(h); h=0, \pm 1, \dots\}$ をその covariance function の列 とする。このとき $SLSE \hat{\beta}_T$ の strong consistency の十分条件は以下の Theorem で与えられる。

Theorem 4.

R.1. 任意の $i, j=1, 2, \dots, p$ と任意の $h=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対し,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^{T-h} x_{it} x_{jt+h}}{\|x_i\|_T \|x_j\|_T}$$
 が存在するものとし, これを $\rho_{ij}(h)$ とおく。
 但し, $\|x_i\|_T = (\sum_{t=1}^T x_{it}^2)^{1/2}$ とする。又 $R(h) = [\rho_{ij}(h)]$ とし, $R(0)$ は nonsingular とする。

R.2. $0 < \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T x_{it}^2}{T^\alpha} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T x_{it}^2}{T^\alpha} < \infty$ かつ, $i=1, 2, \dots, p$ と $\alpha > \frac{1}{2}$ に対し成り立つものとする。

R.3. $0 \leq f(\omega) < C_1 < \infty$ for $-\pi \leq \omega \leq \pi$ とする。

以上の下で, $\hat{\beta}_T \rightarrow \beta$ a.e. as $T \rightarrow \infty$.

proof: (略証) R.1. の条件は, $SLSE$ の asymptotic efficiency を考えたときに, 出て来た regularity condition だ, すでに Grenander v. (16) が使っている。 $D_T = \text{diag}(\|x_1\|_T, \|x_2\|_T, \dots, \|x_p\|_T)$ とすれば,

$$\hat{\beta}_T - \beta = \left(\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T x_t u_t = D_T^{-1} \left(D_T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t x_t' D_T^{-1} \right)^{-1} D_T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t u_t$$
 とおくと $D_T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t x_t' D_T^{-1} \rightarrow R(0)$ as $T \rightarrow \infty$ と R.2. を使って, $p=1$ の場合に戻す。後は, Hamman, E. J. (18) の方法と同様である。□

Remark: $u_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} c(\lambda) dZ(\lambda, \omega)$ (但し $c(\lambda)$: bounded function) と

このような uniformly modulated process の場合でもこの Theorem の内容は成立する。すなわち、直交増分過程 $Z(i, \omega)$ の modulation process であれば成立する。

§6. Strong consistency of sample spectral density function by using estimated residuals.

estimated residual から $\{u_t\}$ の spectral density function を推定したときの研究は沢山ある。(ex. Hannan, E.J. ([17]) の chap VII)
この節の目的は, error process $\{u_t\}$ に order known の AR-model を仮定したとき, 推定残差から形式的にその係数の SLSE を作って, それが strong consistent である条件を考察し, その係数の SLSE を使った spectral density function の推定量が strong consistent であることを示す。

estimated residuals を $u_t^* = y_t - \hat{\beta}'x_t$ $t=1, 2, \dots, T$ とする。

Lemma 6.

- 1°. $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{pt})'$ の各要素の関数を t の有界関数とする。
- 2°. Theorem 4 の仮定を満たすものとする。

このとき, $\frac{\sum_{t=1}^T u_t^*}{T} \rightarrow 0$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ である。

proof: $\{u_t\}$ の sample mean の SLLN を調べる。 $\frac{\sum_{t=1}^T u_t}{T} \rightarrow 0$ a.e.

as $T \rightarrow \infty$ の十分条件は, Doob, J.L ([14]) より,

$\exists K$ s.t. $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \phi(t-s) \leq \frac{K}{T^\alpha}$ ($\alpha > 0$) である。今の model では, R.3 を使えば, $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \phi(t-s) \leq \frac{2\pi C_1}{T}$ となる。故に $\frac{\sum_{t=1}^T u_t}{T} \rightarrow 0$ a.e. は成

立している。又、 1° を使えば

$$\bar{u}_T^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\beta}_T' x_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (u_t + (\beta - \hat{\beta}_T)' x_t) = o(1) \text{ a.e.}$$

as $T \rightarrow \infty$ である。□

次に, sample autocovariance function based on estimated residuals
を $C^*(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (u_t^* - \bar{u}_T^*)(u_{t+h}^* - \bar{u}_T^*)$ で定義する。

Lemma 7.

$1^\circ x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{pt})'$ の各要素は t の関数として有界な関数とする。

$2^\circ u_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ ($\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, $\{\varepsilon_t\}$: i.i.d.) とする。

3° Theorem 4 の仮定を満たすものとする。

これらの条件の下で, $C^*(h) \rightarrow o(h)$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ for each $h=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。

proof; $C^*(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} u_t^* u_{t+h}^* - \frac{1}{T(T-h)} \sum_{t=1}^{T-h} u_t^* \sum_{t=1}^T u_t^* - \frac{1}{T(T-h)} \sum_{t=1}^{T-h} u_{t+h}^* \sum_{t=1}^T u_t^* + \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} u_t^{*2}$, 第2, 3, 4項は, Lemma 6 より O_k a.e. 収束し

ているので, $C^*(h)$ の a.e. の asymptotic behaviour は, $C^{**}(h) =$

$\frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} u_t^* u_{t+h}^*$ の behaviour と同じ。更に,

$$C^{**}(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} \{u_t u_{t+h} + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_t u_{t+h} + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_{t+h} u_t + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_t (\hat{\beta}_T - \beta)' x_{t+h}\}$$

の第2, 3, 4項は 1° と Theorem 4 の結果から O_k 概収束する。よ

うて $C^{**}(h)$ と $C(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} u_t u_{t+h}$ の a.e. の asymptotic beha-

viours は同じ。又 2° より $\{u_t\}$ は ergodic になるのて,

$C(h) \rightarrow EC(h) = o(h)$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ 。故に $C^*(h) \rightarrow o(h)$ a.e.

as $T \rightarrow \infty$ for each $h=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. \square

次に $\{u_t\}$ に order K の AR-model を仮定する。i.e.

$u_t - \sum_{j=1}^K a_j u_{t-j} = \varepsilon_t$ (但し, $\{\varepsilon_t\}$ は $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$ の i.i.d. の innovation とする。) 又, この特性多項式の roots 全てが単位円の内部にあるものとする (stationarity)。これより $\{u_t\}$ は, Lemma 7 のような形に表現できるので, ergodic である。 $\{u_t^*; t=1, 2, \dots, T\}$ を使って, a_1, a_2, \dots, a_K を推定する。criteria は, least squares principle で, $\sum_{t=K+1}^T \left\{ u_t^* - \sum_{j=1}^K a_j u_{t-j}^* \right\}^2 \rightarrow \min$ である。Normal equations は, $\frac{1}{T} \sum_{t=K+1}^T \left\{ u_t^* - \sum_{j=1}^K a_j u_{t-j}^* \right\} u_{t-k}^* = 0$, $k=1, 2, \dots, K$ である。この matrix equation は, $\hat{C}^* \hat{a}^* = \hat{C}_0^*$ と表現される。但しここで, $\hat{C}^* \equiv [\hat{C}^*(h, K)] \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=K+1}^T u_{t-h}^* u_{t-K}^*$, $h, h'=1, 2, \dots, K$, $\hat{C}_0^* = [\hat{C}^*(0, 1), \hat{C}^*(0, 2), \dots, \hat{C}^*(0, K)]'$, $\hat{a}^* = [\hat{a}_1^*, \hat{a}_2^*, \dots, \hat{a}_K^*]'$ は, $a = [a_1, a_2, \dots, a_K]'$ の SLS である。又パラメータの間には, $C a = C_0$ (但し, $C \equiv [\phi(i-j) \ i, j=1, 2, \dots, K]$, $C_0 \equiv [\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(K)]'$) の関係がある。Lemma 7 より, $\hat{C}^*(i, j) \rightarrow \phi(i-j)$ a.e. as $T \rightarrow \infty$, $\hat{C}^*(0, j) \rightarrow \phi(j)$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ がわかっている。故に $\hat{C}^* \hat{a}^* = \hat{C}_0^*$ と $C a = C_0$ との関係より, $\hat{a}^* \rightarrow a$ a.e. as $T \rightarrow \infty$ 。

さて, 真の spectral density は, $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi | \sum_{j=0}^K a_j e^{i\lambda j} |^2}$ (但し, $a_0 = 1$) であり, これを $\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{a}^{*2}}{2\pi | \sum_{j=0}^K \hat{a}_j^* e^{i\lambda j} |^2}$ で推定する。そこで, $\alpha^2 = E\varepsilon_t^2 = E(u_t - \sum_{j=1}^K a_j u_{t-j})^2 = \sum_{j=0}^K \sum_{l=0}^K a_j a_l \phi(j-l)$ $\hat{\alpha}^{*2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (u_t^* - \sum_{j=1}^K \hat{a}_j^* u_{t-j}^*)^2$ である。

$\hat{\alpha}^* = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T u_t^* - z u_t^* \sum_{j=1}^k \hat{a}_j^* u_{t-j}^* + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \hat{a}_j^* \hat{a}_l^* u_{t-j}^* u_{t-l}^* \right) z'$, 第1項は
 Lemma 7 より $\alpha(0)$ に概収束し, 第2項は, $-z \sum_{j=1}^k a_j \alpha(j)$ に
 概収束し, 第3項は $\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k a_j a_l \alpha(j-l)$ に概収束する。よって
 $\hat{\alpha}^*$ は $\sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k a_j a_l \alpha(j-l) = \sigma^2$ に概収束する。故に $\hat{f}(\lambda)$ は,
 strong consistent estimators の連続関数像であるので, $f(\lambda)$ に
 a.e. で収束する。i.e. $\hat{f}(\lambda)$ は $f(\lambda)$ の strong consistent estimator
 である。) を証明してまとめておく。

Theorem 5.

1° x_t の各要素の関数 ϕ が L^2 の有界な関数とする。

2° $\{u_t\}$ を order known (k) の AR process の stationarity
 condition は満たしているとし, innovation は i.i.d. とする。

3° Theorem 4 の仮定の条件を満たしているものとする。

以上の条件の下で, $\hat{f}(\lambda) \equiv \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{2\pi \left| \sum_{j=0}^k \hat{a}_j^* e^{i\lambda j} \right|^2} \rightarrow f(\lambda)$ a.e. as $T \rightarrow \infty$
 for each $\lambda \in [-\pi, \pi]$ である。

REFERENCES.

1. ANDERSON, T. W. and J. B. TAYLOR (1976). Strong Consistency of Least Squares Estimates in Normal Linear Regression. *Ann. Statist.* 4 788-790
2. ANDERSON, T. W. and J. B. TAYLOR (1976). Conditions for strong consistency of least squares estimates in linear models. *Tech Rep. Stanford Univ. No. 213 (The Economic Series)*.
3. BREIMAN, L. (1968) Probability. Addison-Wesley.
4. DOOB, J. L. (1953) Stochastic processes. John Wiley.
5. EICKER, F. (1963) Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions. *Ann. Math. Statist.* 34 447-456
6. GRENNANDER, U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math Statist.* 25 252-272
7. HANNAN, E. J. (1970) Multiple time series. John Wiley.
8. HANNAN, E. J. (1971) Non-linear time series regression. *J. Appl. Prob.* 8 767-780
9. LAI, T. L. and H. ROBBINS (1977) Strong consistency of least squares estimates in regression models. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 74 2667-2669
10. LUKACS, E. (1975) Stochastic convergence. 2nd ed. Academic Press.